Développement asymptotique de la série harmonique

Oraux X-ENS, Analyse 1, p. 145

Lemme : Pour tout $\alpha > 1$, $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}$.

Pour $\alpha > 1$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est décroissante et intégrable sur $[1,+\infty[$.

D'où $\forall k \geq 2$, $\forall t \leq k$, $\frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{t^\alpha}$ et $\forall t \geq k$, $\frac{1}{k^\alpha} \geq \frac{1}{t^\alpha}$ d'où par intégration, $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha}\,dt \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^\alpha}\,dt$.

Donc $\forall n \geq 1$, $\forall N \geq n+1$, $\displaystyle\int_{n+1}^{N} \frac{1}{t^\alpha}\,dt \leq \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_n^{N-1} \frac{1}{t^\alpha}\,dt$

$$\xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} = \int_{n+1}^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,dt \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_n^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,dt = \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

D'où $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}$.

Proposition : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $H_n := \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
Alors il existe $\gamma > 0$ tq $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$.

- Posons $u_n = H_n - \ln n$. Alors $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \leq \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} = 0$ — $\forall x > -1$, $\ln(1+x) \leq x$
  Donc $(u_n)_{n\geq 0}$ est décroissante.
- Posons $v_n = u_n - \frac{1}{n}$. Alors $v_{n+1} - v_n = \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{n} = -\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) + \frac{1}{n} = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \geq 0$
  Donc $(v_n)_{n\geq 0}$ est croissante.
- Et $u_n - v_n = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Donc $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ sont adjacentes. Elles convergent donc vers $\gamma \in \mathbb{R}$.
  Or $v_2 = 1 + \frac{1}{2} - \ln(2) - \frac{1}{2} = 1 - \ln(2) > 0$ donc $\gamma > 0$.

Proposition : $H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

- Posons $t_n = u_n - \gamma = H_n - \ln(n) - \gamma$. Alors $t_n - t_{n-1} = u_n - u_{n-1} = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}$.

  $\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \underset{n\to\infty}{=} -\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3}\right) + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$

  Puisque $\forall n \geq 2$, $t_n - t_{n-1} \leq 0$, $\displaystyle\sum_{n\geq 2}(t_n - t_{n-1})$ CV par comparaison.
  Donc $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}(t_k - t_{k-1}) \underset{n\to\infty}{\sim} -\frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n\to\infty}{\sim} -\frac{1}{2n}$ par le lemme. Or, $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}(t_k - t_{k-1}) = -t_n$ car $(t_n)_{n\geq 0}$ tend vers 0.

D'où $t_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$ et $H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

- Posons $w_n = t_n - \frac{1}{2n} = H_n - \ln(n) - \gamma - \frac{1}{2n}$.

Alors :
$$\begin{aligned} w_n - w_{n-1} &= \frac{1}{n} - \ln(n) - \frac{1}{2n} + \ln(n-1) + \frac{1}{2n-2} \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n}\frac{1}{1-\frac{1}{n}} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n}\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \frac{1}{2n^3} - \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ &= \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \end{aligned}$$

$\frac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{k\geq 0} x^k$, $\forall |x| < 1$

Par comparaison, $\displaystyle\sum_{n\geq 2}(w_n - w_{n-1})$ CV et $-w_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}(w_k - w_{k-1}) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{6}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^3} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{12n^2}$.

D'où $w_n \underset{n\to\infty}{\sim} -\frac{1}{12n^2}$ et $H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.